Unidad I

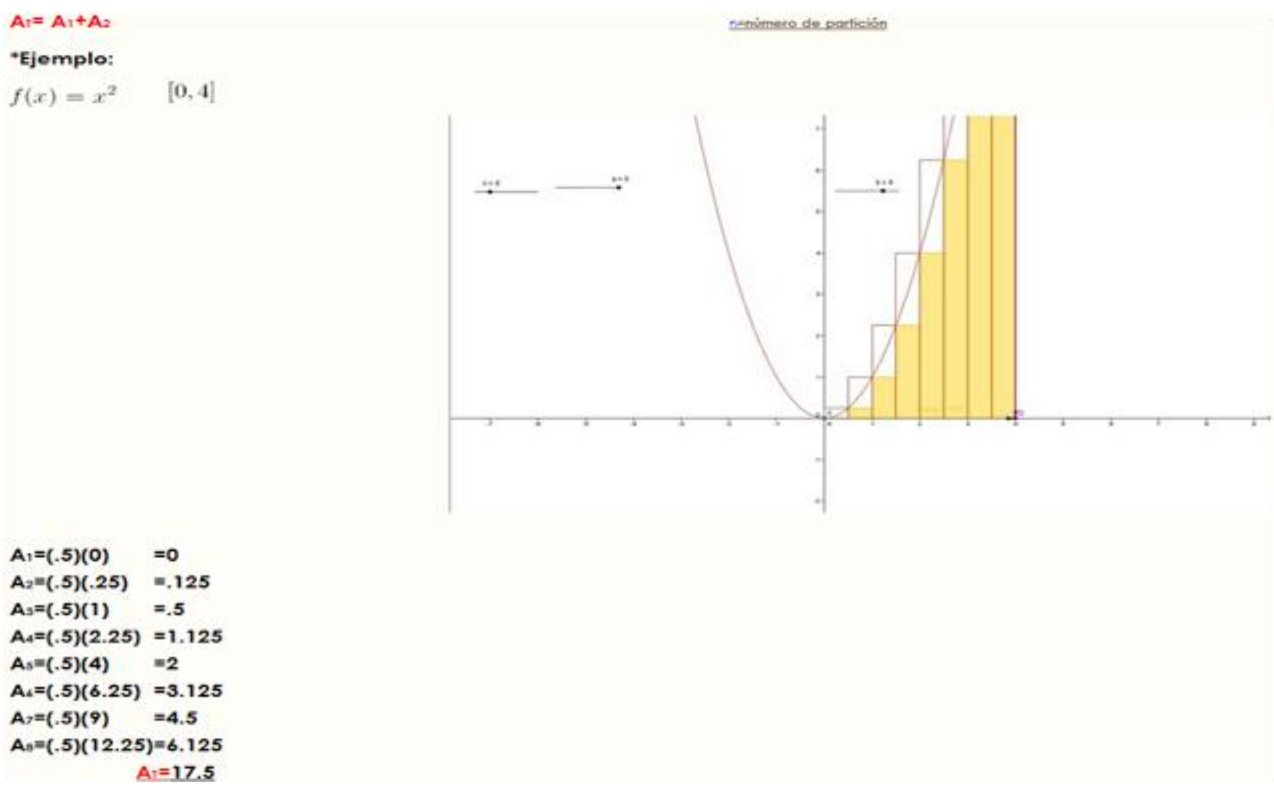
Teorema fundamental del cálculo.

1.1 Medición aproximada de figuras amorfas.

Las figuras amorfas, “son aquellas figuras que no tienen forma porque en realidad TODO tiene una forma, pero se refiere a que no tiene forma conocida, no es un cuadrado, ni triángulo, ni nada de ese estilo. Es una curva o una figura de muchos lados distintos y "deforme". y su principal finalidad es encontrar en una grafica dada su área de la parte de adentro de la figura donde se encuentra el punto dado de la figura amorfa”. La notación sumatoria es encontrar el valor de la ecuación dada respecto a un número determinado cuando un punto “n” tiende a cualquier número dado. Existen dos tipos de notación sumatoria: la notación sumatoria abierta y la notación sumatoria pertinente. La suma de riemman es igual al de las figuras amorfas solo que en esta se emplean una series de formulas para una aproximación del área total bajo la grafica de una curva. La integral definida es utiliza para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas, también son llamadas así porque dada una ecuación su integral es definida por que esta tiende de un punto a otro y se podría decir que se conoce el valor al que se quiere graficar esa función.las propiedades de la integral definida son 10.

Ejemplos de figuras amorfas.

2



3

1.2 Notación sumatoria.

Notación sigma.

En la sección anterior hemos estudiado la antiderivación. En esta sección investigaremos un problema referente al cálculo del área de una región en el plano. A primera vista, parece que esos dos conceptos no tengan relación alguna. No obstante, descubriremos que están íntimamente ligados por el importantísimo teorema fundamental del Cálculo.

Empezamos introduciendo una notación concisa para las sumas, que se denomina ***notación sigma*** debido a que utiliza la letra griega Σ, la sigma mayúscula.

NOTACIÓN SIGMA.

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ***se escribe***

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

donde i es el índice de suma, a_i ***es el i-ésimo término de la suma, y los límites inferior y superior de la suma son 1 y n.***

Nota: Los límites inferior y superior de la suma han de ser constantes respecto del índice de suma. Sin embargo, el límite inferior no tiene por que ser 1. Cualquier entero menor o igual que el límite superior es lícito.

Las siguientes propiedades se deducen usando las leyes asociativa y conmutativa de la suma y la distributiva de la suma respecto de la multiplicación. (En la primera propiedad, *k* es una constante.)

1. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

El próximo teorema, cuya demostración se proporcionan a continuación, resume varias fórmulas útiles de suma de potencias.

1.3 Sumas de Riemann.

En matemáticas, la **suma de Riemann** es un método de integración numérica que nos sirve para calcular el valor de una integral definida, es decir, el área bajo una curva, este método es muy útil cuando no es posible utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo. Estas sumas toman su nombre del matemático alemán Bernhard Riemann.
La suma de Riemann consiste básicamente en trazar un número finito de rectangulos dentro de un área irregular, calcular el área de cada uno de los rectangulos y sumarlos. El problema de este método de integración numérica es que al sumar las áreas se obtiene un margen de error muy grande.

Introducción

Es aquella sumatoria en la cual se hacen varias subdivisiones del área bajo la curva y se van calculando las partes de una función por medio de rectángulos con base en un incremento en el eje X, ya que la suma de toda las áreas de los rectángulos va ser el área total. Dicha área es conocida como la suma de Riemann

Dada f(x) en el intervalo [a,b] para encontrar el área bajo la curva: Dividimos la región "S" en franjas de anchos iguales. El ancho de cada franja es:

Teniendo los intervalos:
La ecuación para la suma de Riemann es la siguiente:

donde haciendo de esta como un promedio entre la suma superior e inferior de Darboux.
Para esta suma es importante saber las siguientes identidades:
Sabiendo que:
Podemos obtener las siguientes igualdades:

(donde C es constante)

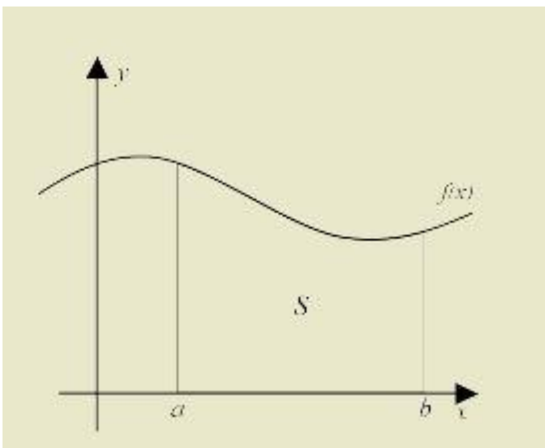
**Esta es solo una breve introducción acerca del tema de: Suma de Riemann
Para que usted pueda ver el tema completo, se tendrá que dirigir a la sección de "Descargas" en la parte izquierda y descargar el archivo Completo.

1.4 Definición de integral definida.

Si *f* es continua en el intervalo [a,b] y f(x) >0

entonces el area bajo la curva *f* sobre el intervalo [a,b]

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Las propiedades de la integral definida:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [\,f(x) \pm g\,(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kdx = k\,(b-a)$$

Ejemplos:

$$\int_5^2 f(x)dx = -\int_0^5 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = 25$$

$$\int_5^5 -4f(x)dx = 0$$

1.5 Teorema de existencia.

Si *f* es una funcion continua en [a,b] F es una antiderivada de *f*, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sea f continua [a,b] y xe [a,b] entonces:

$$g(x) = \int_a^x f(x)\,dt$$

es continua y diferenciable en (a,b) y g'(x) = f(x)

$$\int_0^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \;| = \frac{(4)^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{64}{3} \approx 21.3$$

Ejemplo:

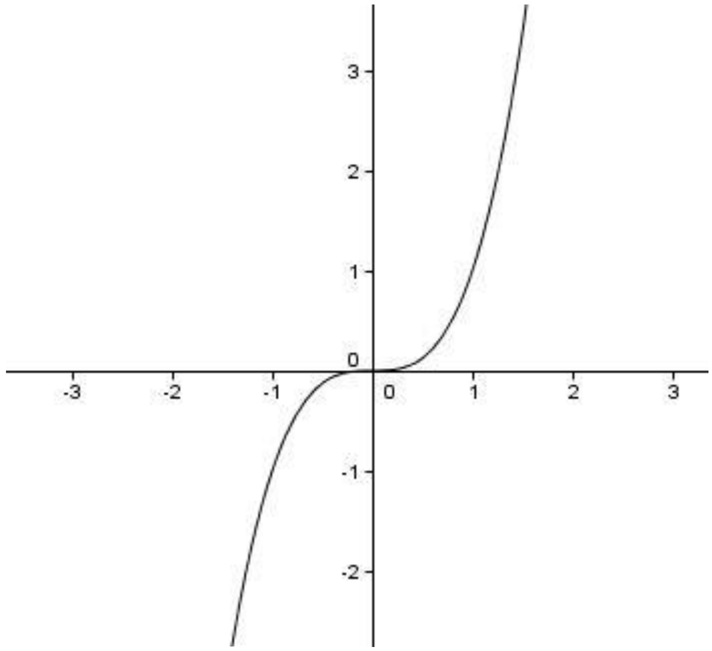
$$f(x) = x^3 \qquad [-2,1\,]$$

$$\int_{-2}^1 x^3\,dx = |\int_{-2}^0 x^3\;| + |\int_0^1 x^3\;|$$

$$\int_{-2}^1 x^3 = \frac{x^4}{4}\;|-2,1\,|$$

$$= \left[\frac{(0)^4}{4}\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4}\right] = -4$$

$$\int_0^1 x^4 = \left[\frac{1}{4}\right] - \left[\frac{0}{4}\right] = \frac{1}{4}$$



$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \; |\int_{-2}^{0} x^3\,dx\,|+|\int_{0}^{1} x^3\,dx$$

$$= [-4] = \left[\frac{16}{4}\right] + \left[\frac{1}{4}\right] = \frac{17}{4}\,u^2$$

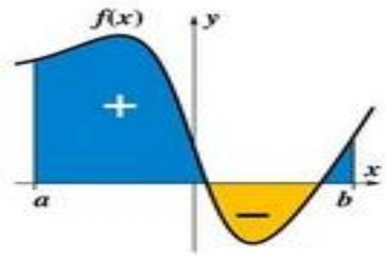
Área de y=x^3 $en\,[-2{,}1]$

$$At = |-4| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{17}{4}\,u^2$$

1.6 Propiedades de la integral definida.

Integral definida.

si una funcion (f) es continua en el intervslo de [a,b] y f(x) >0, entonces el area bajo la curvas f sobre [a,b] es $A = \int_a^b f(x)dx$



$\int_a^a f(x)dx$	$= 0$
$\int_b^a f(x)dx$	$= -\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx$	$= K\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$	$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
$= \int_a^b f(x)dx$	$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
$\int_a^b K dx$	$= K(b-a)$

EJEMPLOS

f y g son funciones integrales: $\int_1^2 f(x)dx = -4$

$\int_1^5 f(x)dx = 6$

$\int_1^5 g(x)dx = 8$

1.-

$\int_1^1 f(x)dx = 0$

la propiedad dice que cuando son iguales es 0

2.-

$\int_5^1 g(x)dx =$

se utilisa la propiedad dos sa cambia [a, b] $-\int_5^1 g(x)dx = -8$

equivale a la tercer funcion del ejercicio.

3.

$\boxed{\int_2^5 f(x)dx =}$

no esta definida en ninguna ecuacion de base se integra

$\boxed{\int_1^5 f(x)dx - \int_1^2 f(x) = 6 - (-4) = 10}$

se agarra los valores de la ecuacion de base se se realiza la resta, que esta vez se dio suma por el signo y sale el resultado.

4.

$\boxed{\int_1^5 4dx = 4(5-1) = 16}$

se utiliza la ultima propiedad, se saca la constante y se resta [a,b]

1.7 Función primitiva.

una funcion primitiva es aquella que despues de haber sido derivada pasando por su diferencial y p
exactamente a su funcion original

ej:

y=3x”+2x+18

dy/dx=6x+2

dy=6x+2 (dx)

Integral=3x”+2x = 3x”+2x+c

Integral definida: Proceso de cálculo de áreas encerrada entre una curva y un eje cartesiano.

Función Primitiva: Relación dependiente de datos sobre uno (o más) valores, que declaran los límit
llama función primitiva, al ser la base del cálculo integral.

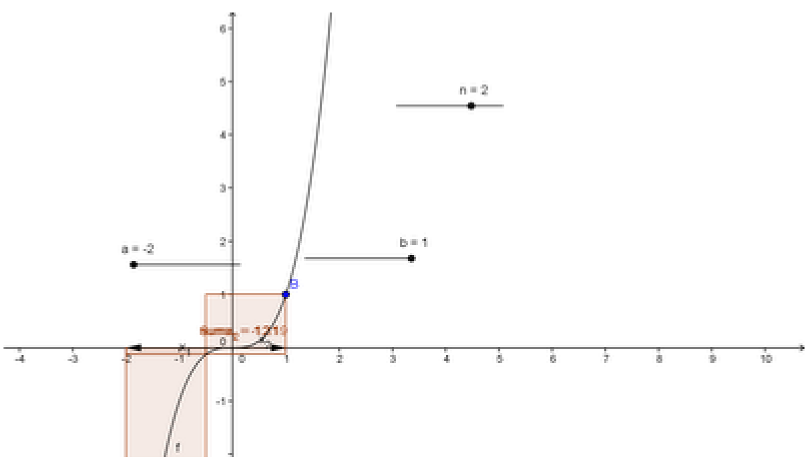
Sean F y f dos funciones definidas sobre el mismo intervalo (o, más generalmente, dominio).

F es una primitiva de f si y sólo si f es la derivada de F: F’ = f.

Mientras que la derivada de una función, cuando existe, es única, no es el caso de la primitiva, pue
+ k, donde k es cualquier constante real.

Para encontrar una primitiva de una función dada, basta con descomponerla (escribirla bajo forma d
elementales cuyas primitivas son conocidas o se pueden obtener leyendo al revés una tabla de der
integral:

1.8 Teorema fundamental del cálculo.



es -2

$$\int_2^1 x^3 dx \equiv$$

$$-(\int_2^0 x^3 dx) + (\int_0^1 x^3 dx)$$

primero tendremos que graficar y de ahi ver los valores que crucen para tener la integral

-$\int_2^0 x^3 dx \equiv \frac{x^4}{4} \int_2^0 \equiv -4$

despues se deriva la x y se evalua en a y b para sacar su area

$$\frac{x^4}{4} = \frac{(0)^4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

se derivo y se evalua primero en b

$$\frac{(-2)^4}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

se derivo y se evalua en a, es mwnos dos elevado al cuatro se hace positivo

$$(0 - 4) = -4$$

despues se resta la primera integral evaluada en 0 (b) y en -2(a) y te da el resultado

se deriva la segunda derivada

$$\int_0^1 x^3 dx \equiv \frac{x^4}{4} \int_0^1 \equiv \frac{1}{4}$$

$$\frac{x^4}{4} \equiv \frac{1^4}{4} \equiv \frac{1}{4}$$

se deriva y se evalua en a y b

$$\frac{x^4}{4} \equiv \frac{0^4}{4} \equiv \frac{0}{4} \equiv 0$$

se ederivo la x y se evalua en b

$$\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

despues se reanta b-a

se suman las cantidades de las 2 derivadas

$$A_l = \int -4 \int + \int \frac{1}{4} \int = \frac{17}{4} u^2$$

el -4 es valor obsoluto asi que es positivo por lo tanto se suman 4 + 1/4 y dara la area de la integral.

1.9 Cálculo de integrales definidas.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CALCULO I.

si f es una funcion continua en [a,b] y F es una antederivada de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CALCULO II.

sea f continuo en [a,b] y x f [a,b]. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)dt$

es continua [a,b] y diferenciable en [a,b] y $g(x) = f(x)$

EJEMPLOS

1.

$$\int_0^4 x^2 dx$$

se deriva $\frac{x^3}{3} \int_0^4$

se evalua con la formula [b-a] $\text{punto b}\frac{(4)^3}{3} - \text{punto a}\frac{(0)^3}{3}$

se restara y quedara el resultado final $\frac{64}{3} - \frac{0}{3} = \frac{64}{3}\text{se divide} \approx 21.\overline{3}$

2.

a es -1

$\int_1^3 (x^2 - 4)dx$

se deriva $\frac{x^3}{3} - 4x \int_1^3$ a es -1

$\text{se evalua en la formula b-a} = [\frac{3^3}{3} - 4(3)] - [\frac{-1^3}{3} - 4(-1)]$

1.10 Integrales Impropias.

Si f es continua sobre [a,b] y | f(X)| ---> infinito

cuando x ---> b entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$$

Si f es continua sobre [a,b] y | f(x)| ----> infinito

cuando x--> a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a} \int_t^b f(x)\,dx$$

Si | f(x) | ---> infinito cuando x---> c para alguna c en (a,b) y f es continua en todos los demas numeros en [a,b] entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

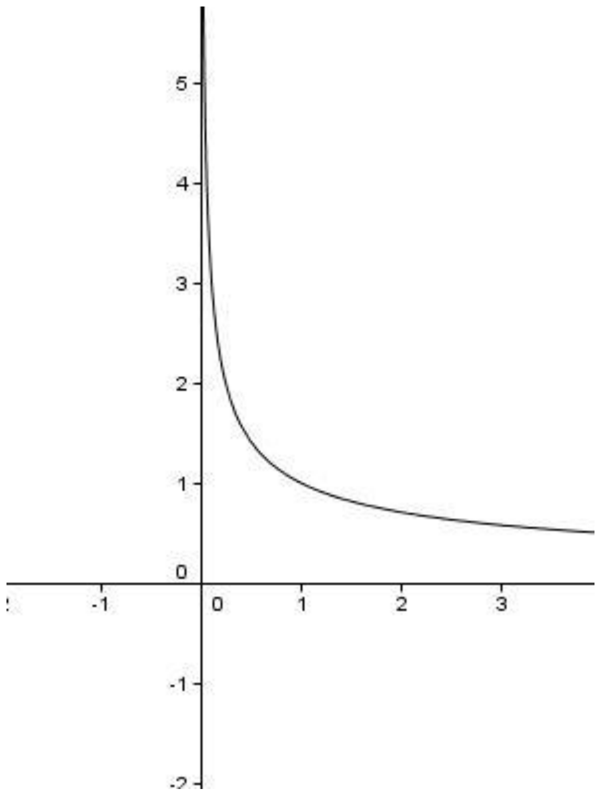
Ejemplo:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t \to 0} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\lim_{t \to 0} 2\sqrt{x} \;\; | \; [4, t]$$

$$\lim_{t \to 0} (2\sqrt{4} - 2\sqrt{t})$$

$$\lim_{t \to 0} (4 - 2\sqrt{t}) = 4 \; converge$$



INTEGRALES IMPROPIAS (INTERVALOS NO ACOTADOS)

Si f es continua sobre [a,infinito), entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

Si f e s continua sobre (-∞,b], entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)dx$$

Si f es continua sobre (-∞, ∞)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$